ハイレベル理数について

津山高校数学科

１　はじめに

理工農学系研究者の育成に向け，高度な専門知識と分野間をつなぐ力，社会で活用する力を育成する目的で，学校設定科目「NSⅠ」（２年次・選択・１単位），「NSⅡ」（３年次・選択・１単位）を開設している。医学・生命科学系研究者育成に向け，同様の目的で「MSⅠ」（２年次・選択・１単位），「MSⅡ」（３年次・選択・１単位）を開設している。それぞれの授業において，外部講師によるワークショップや学外での研修，またその事前・事後学習を行っているが，それらを除いた授業においては「ハイレベル理数」を実施（年８時間程度）している。ワークショップ等が理科の要素を多く含むため，「ハイレベル理数」においては数学の内容を実施している。

２　題材選定や授業設計

題材については，以下を念頭に選定している。

①身近な事象と関連させることで，既習内容が深い学びに繋がるようなもの。

②大学で学ぶ数学（線形代数学や微分積分学など）の一端に触れられるようなもの。

③数学的に深い背景のある入試問題。

④複数の解法が考えられ，様々な知見が得られるようなもの。

また，授業においては

- ○既習内容の概念や原理・法則を改めて確認するとともに，発展的な課題に対して活かしたり，単元の垣根を越えて様々な視点から考察したりすることができるか【Vision】
- ○発展的な課題に粘り強く取り組み，数学的論拠に基づいて考察しようとしたり，問題解決の過程を振り返って考察を深めたりすることができるか【Grit】
- ○様々な事象に対して論理的に考察したり，事象の本質や他の事象との関係を認識し，統合的・発展的に考察しようとしたり，数学的な表現を用いて事象を説明することができるか【ResearchMind】

の３点で指導者が評価したり，生徒側にフィードバックできるように授業を設計したりしている。

３　具体的な題材

実際に授業で使用した題材として，いくつか紹介したい。

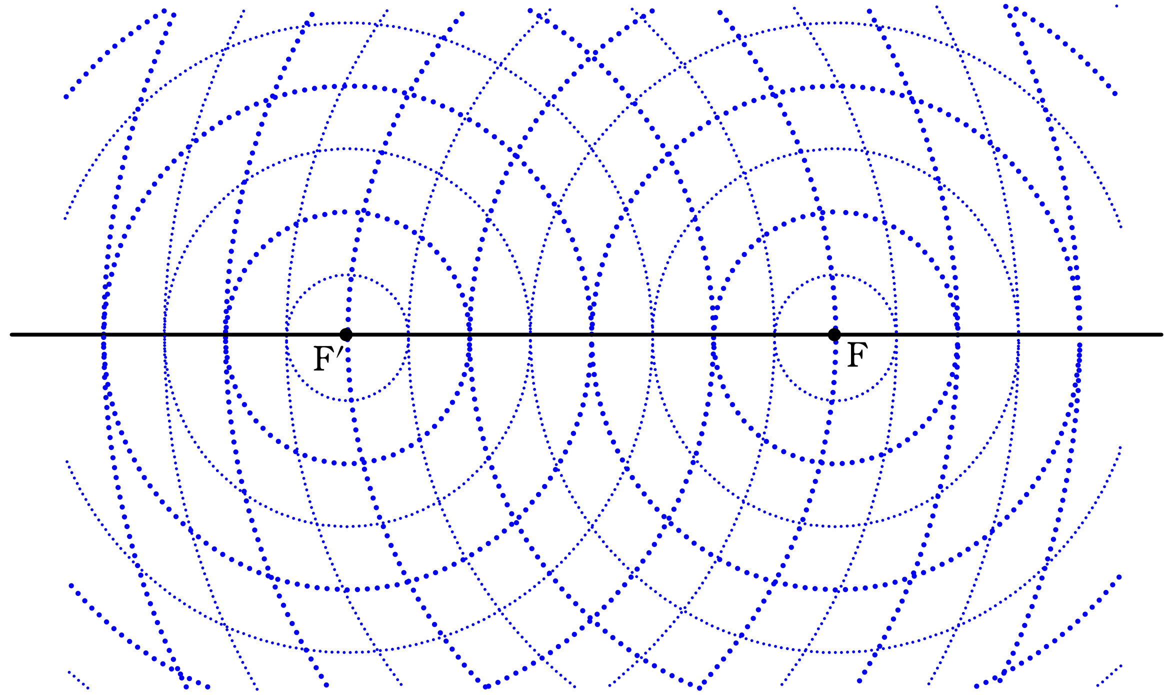
題材名	関連単元	補足
バーゼル問題	数列，極限	導入として平易な無限級数の計算からスタートする。後半はオイラーによる解法をなぞる。
ｉのｉ乗	複素数平面，指数関数	指数関数のべき級数による表現や，オイラーの公式等，主値の導出には様々な準備を要する。
代数的ゲームの必勝法	整数，場合の数	石取りゲーム等。具体的な数値での考察を経た後，文字に置き換えて一般化する。
テイラー展開	極限，微分法	グラフ表示ソフト（desmos 等）により原理を視覚的に確認。様々な関数に対して自分達で計算させる。
鳩ノ巣原理	整数	原理の確認の後，様々な証明問題に挑戦させる。
○○分布	統計的な推測	ＦＳ分布，幾何分布，ポアソン分布等を紹介し，期待値・分散計算を行う。
4^(n)-1≡0（mod3）の証明	整数，数列，場合の数	10 通り以上の証明方法がある。グループでいくつの証明ができるかを競わせる。
条件付確率の諸問題	確率，統計的な推測	モンティホール問題，サーベロニの囚人問題。紙コップとコインを用いた実証実験も行った。
２次曲線に触れてみよう	２次曲線	親近感の沸く問題設定、また同心円を利用した作図等を取り上げた。

☆

問題① のどがかわいた犬が，水たまり(点 F)に行くか，川(陸地との境界線を ℓ)に行くか悩んでしまう位置の集合を求めよ。

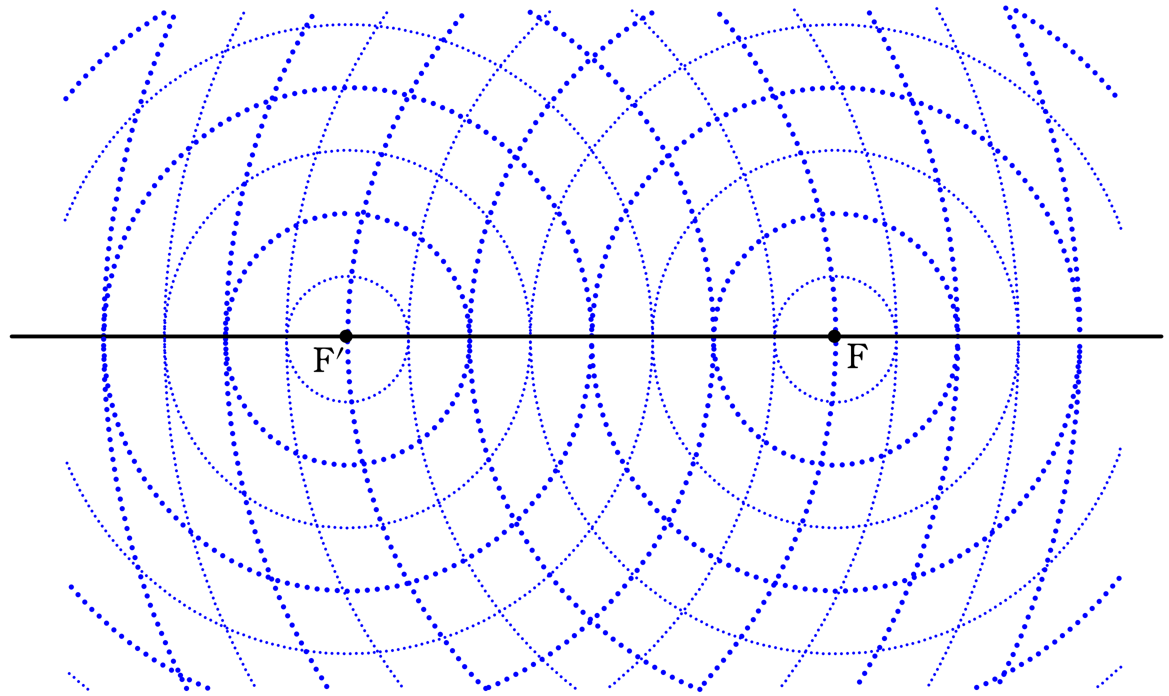
☆

問題② 下図の 2 定点からの距離の和が 10 となるような点をいくつかとり，そのような点の集合がどのようになるか考えよ。同心円は半径が 1 ずつ異なる円を表している。



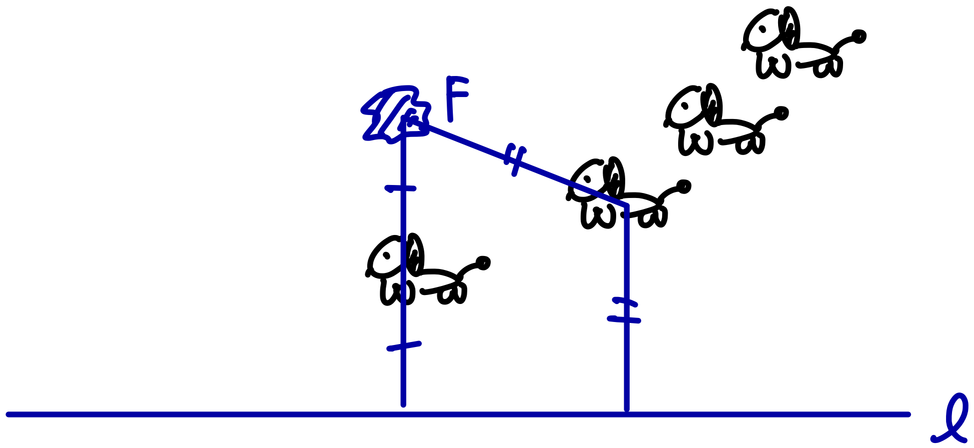
☆

問題③ 下図の 2 定点からの距離の差が 6 となるような点をいくつかとり，そのような点の集合がどのようになるか考えよ。同心円は半径が 1 ずつ異なる円を表している。



☆ 放物線

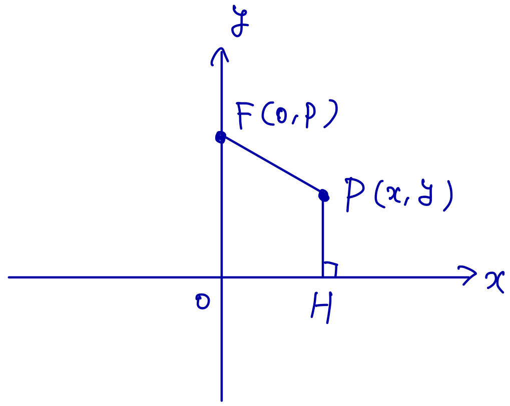
問題① のどがかわいた犬が，水たまり(点 F)に行くか，川(陸地との境界線を ℓ)に行くか悩んでしまう位置の集合を求めよ。



☆ xy平面できちんと考える.

ℓ を x軸と重ね，$F(0,p)$ とする.

$P(x,y)$ として，x軸に垂線 PH を下ろす.



$PF = PH$ から $PF^2 = PH^2$.

$$(x-0)^2+(y-p)^2 = y^2$$

$$x^2+\cancel{y^2}-2py+p^2=\cancel{y^2}$$

$$2py = x^2+p^2$$

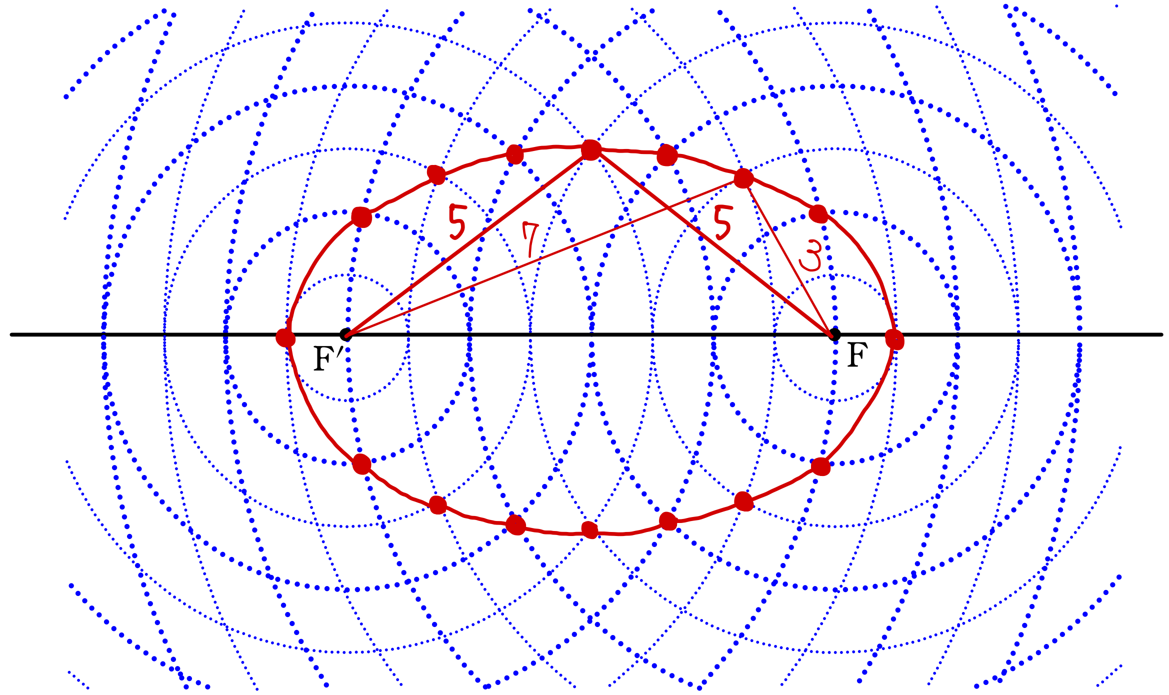
$$\underline{y=\frac{1}{2p}x^2+\frac{1}{2}p}$$

→ $(0, \frac{1}{2}p)$ が頂点の放物線.

ℓ と F の中点.

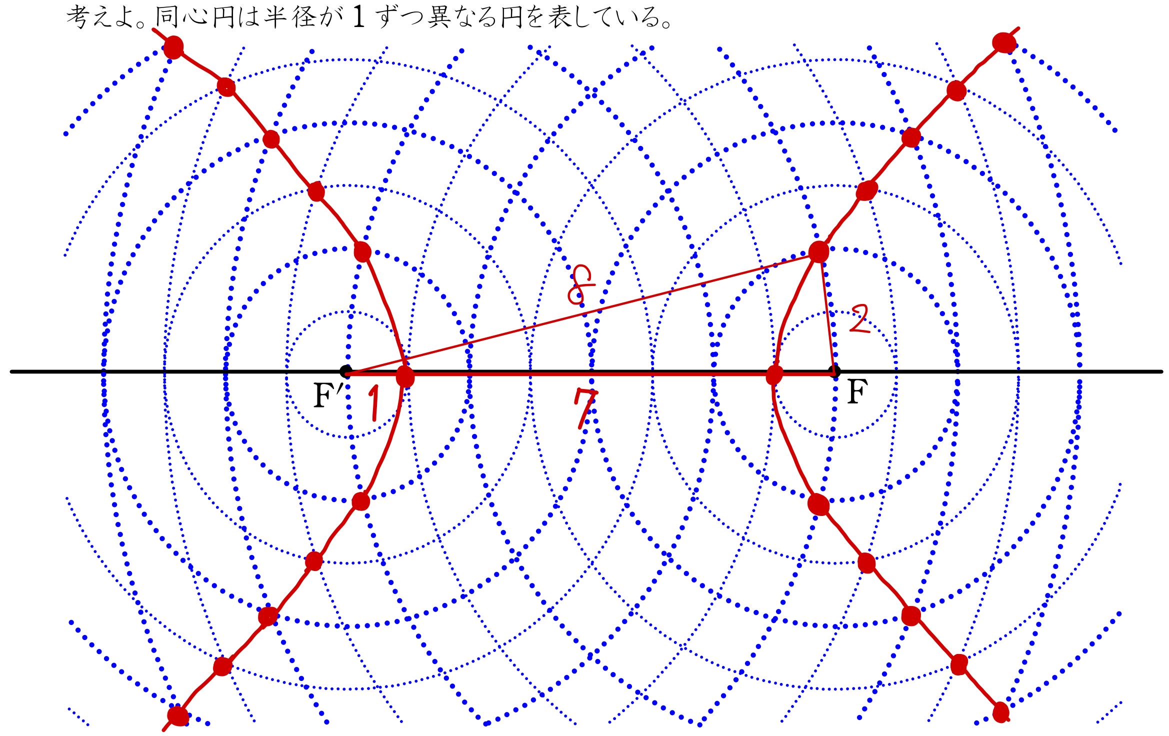
☆ 楕円

問題② 下図の 2 定点からの距離の和が 10 となるような点をいくつかとり，そのような点の集合がどのようになるか考えよ。同心円は半径が 1 ずつ異なる円を表している。



☆ 双曲線

問題③ 下図の 2 定点からの距離の差が 6 となるような点をいくつかとり，そのような点の集合がどのようになるか考えよ。同心円は半径が 1 ずつ異なる円を表している。



問題１　右の図２は碁盤の目状の道路とし，すべて等間隔であるとする。図２において，点 A から点 B に行く最短経路は全部で何通りあるか求めよ。ただし，斜線の部分は通れないものとする。（九州）

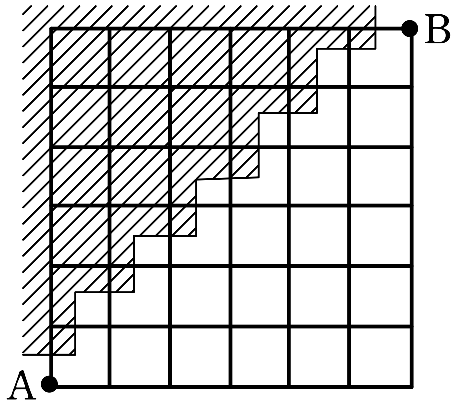


図２

問題２　右の表をみんなで協力して埋めよ。ただし，表中の式は以下を表すものとする。

n	0	1	2	3	4	5	…
C_n							…
R_n	—						…
T_n	—	—					…
D_n	—	—	—				…

C_n は右の２つのルールにより定める。$C_0=1$，$C_{n+1}=C_0\cdot C_n+C_1\cdot C_{n-1}+\cdots+C_{n-1}\cdot C_1+C_n\cdot C_0$

R_n は $n\times n$ の碁盤目状の道路について，最も左下の地点 A から最も右上の地点 B までの最短経路のうち，対角線 AB よりも上部の交差点を通過しない経路数。問題１は R_6 である。

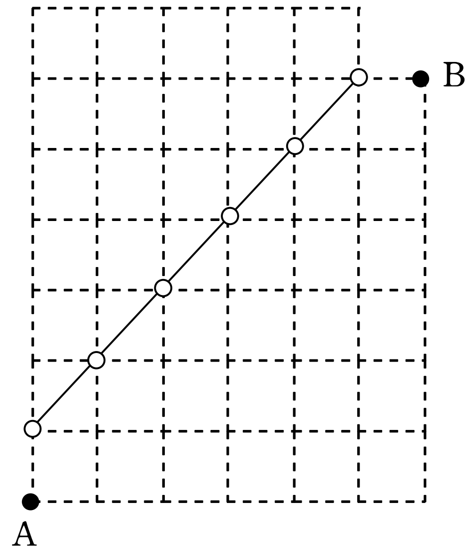
※→方向よりも多く↑方向に進むことはないように進む経路数。

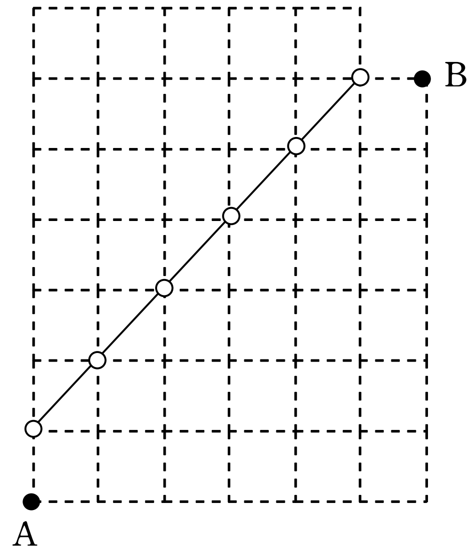
T_n は n チームでトーナメント表を作ったときのパターン数。

D_n は n 角形を $(n-3)$ 本の対角線で分割するパターン数。

上記の表の C_n を［　　　　　］という。様々なパターン数としてこれが出現し，ずれがあるものもあるが，R_n，T_n，D_n 等が該当する。

問題３　R_6（つまり，C_6）を，問題１とは別の方法（下の図を利用）で求めよ。





問題４　C_n を n の式で表せ。

<u>問題１</u>　右の図２は碁盤の目状の道路とし，すべて等間隔であるとする。図２において，点Ａから点Ｂに行く最短経路は全部で何通りあるか求めよ。ただし，斜線の部分は通れないものとする。（九州）

右のように交差点に数をかいていく。
（その点までの経路数を表す）

132通り。

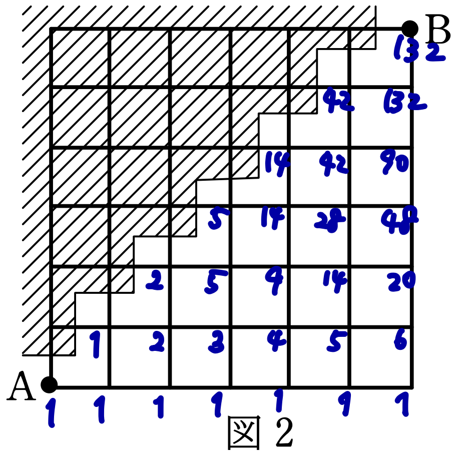


図２

<u>問題２</u>　右の表をみんなで協力して埋めよ。ただし，表中の式は以下を表すものとする。

n	0	1	2	3	4	5	…	
C_n	1	1	2	5	14	42	…	
R_n	—	1	2	5	14	42	…	$R_n = C_n$
T_n	—	—	1	2	5	14	…	$T_n = C_{n-1}$
D_n	—	—	—	1	2	5	…	$D_n = C_{n-2}$

C_n は右の２つのルールにより定める。$C_0=1$，$C_{n+1}=C_0\cdot C_n+C_1\cdot C_{n-1}+\cdots+C_{n-1}\cdot C_1+C_n\cdot C_0$

R_n は $n\times n$ の碁盤目状の道路について，最も左下の地点Ａから最も右上の地点Ｂまでの最短経路のうち，対角線ＡＢよりも上部の交差点を通過しない経路数。<u>問題１</u>は R_6 である。

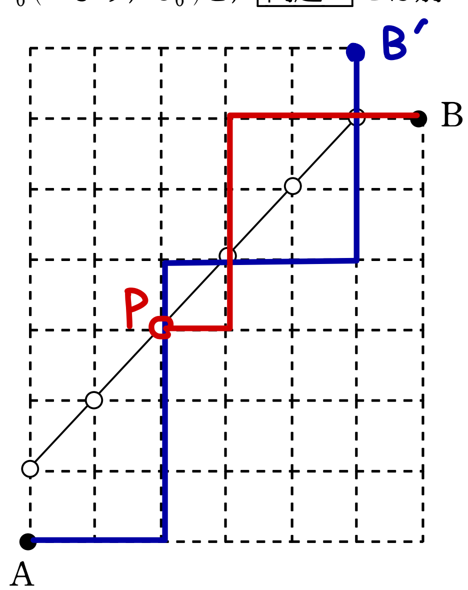
※→方向よりも多く↑方向に進むことはないように進む経路数。

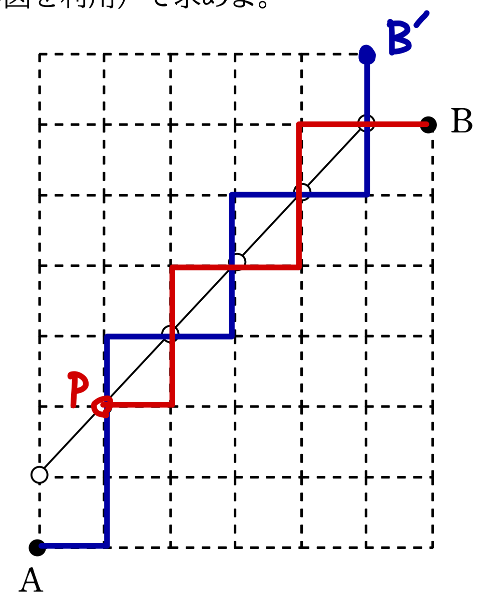
T_n は n チームでトーナメント表を作ったときのパターン数。

D_n は n 角形を $(n-3)$ 本の対角線で分割するパターン数。

上記の表の C_n を［カタラン数］という。様々なパターン数としてこれが出現し，ずれがあるものもあるが，R_n，T_n，D_n 等が該当する。

<u>問題３</u>　R_6（つまり，C_6）を，<u>問題１</u>とは別の方法（下の図を利用）で求めよ。





求める経路数は，(A～Bの経路数)−(○を通過する経路数)

A～B′の経路で最初に通る○をPとする。

P～Bの経路は，P～B′の経路を上記の斜線で折り返すことで作れる。そしてこれらは1:1に対応する。

よって，${}_{12}C_6 - {}_{12}C_5 = \frac{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7}{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1} - \frac{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}$

$= 924 - 792 = 132$

<u>問題４</u>　C_n を n の式で表せ。

上記と同様に考えると，

${}_5C_2 = \frac{5\cdot4}{2\cdot1} = \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{2\cdot1\cdot3\cdot2\cdot1} = \frac{5!}{2!\,3!}$

$$C_n = {}_{2n}C_n - {}_{2n}C_{n-1}$$

$$= \frac{(2n)!}{n!\,(2n-n)!} - \frac{(2n)!}{(n-1)!\,\{2n-(n-1)\}!}$$

$$= \frac{(2n)!}{n!\,n!} - \frac{(2n)!}{(n-1)!\,(n+1)!}$$

$$= \frac{(2n)!\,(n+1)}{n!\,(n+1)!} - \frac{n\cdot(2n)!}{n!\,(n+1)!}$$

$$= \frac{(2n)!}{n!\,(n+1)!} = \frac{1}{n+1}\cdot\frac{(2n)!}{n!\,n!} = \frac{{}_{2n}C_n}{n+1}$$

$\boxed{1}$ $i^i=?$

$i^2=-1$ですが，i^iはどんな数なのでしょう？

$\boxed{2}$ **オイラーの公式＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿の登場**

$e=\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$で定義する無理数で，その値は$e=2.718281828459045\cdots$であることが知られています。（数学Ⅲで学習します）

次に、聞いたことがある人もいると思いますが、テイラー展開、マクローリン展開です。

【テイラー展開】

【マクローリン展開】（テイラー展開に$a=0$を代入）

代表的な「マクローリン展開」に次のようなものがあります。

e^x

$\sin\theta$

$\cos\theta$

ここで，①に$x=i\theta$を代入すると，

$e^{i\theta}$

$i^1=i$，$i^2=-1$，$i^3=-i$，$i^4=1$，$i^5=i$，…（周期４）となることに注意すると

$e^{i\theta}$

この式と②③をよくみると

$e^{i\theta}$

さらに，この式（オイラーの公式）に$\theta=\pi$を代入すると

$e^{i\pi}$

$\boxed{3}$ **複素数の極形式**

複素数平面上で，複素数$z=a+bi$を表す点Pをとり，線分OPの長さをr，半直線OPが実軸の正の部分となす角をθとします。

そこで、iを極形式で表すと

$i=$

$\boxed{4}$ **オイラーの公式と極形式から i^i は？**

$i=$

i^i

なんと i^i は＿＿＿＿＿＿＿＿

問題１　A，B，C の 3 つの扉があり，そのうちの 1 つのドアの後ろにある豪華賞品を当てるテレビ番組のコーナーがある。司会者のモンティホールだけが正解の扉を知っている。
挑戦者が A の扉を選んだ。すると，司会者は残された扉のうちから B を開け，それが外れであることを挑戦者に見せ，次のように言った。
「はじめに選んだ A の扉のままでもよいが，ここで C の扉に変更してもよいですよ」
挑戦者は扉を A とする【そのまま】のがよいか，C とする【変更する】のがよいかについて，次のように考えよ。

(1)　直感として【そのまま】，【変更する】のどちらがよいか。（モンティホール問題）
※それとも，【何をしても運命は変わらない】なのか。

(2)　これから指示に従って，実験せよ。

	当たった数	外れた数
【そのまま】戦法		
【変更する】戦法		

(3)　条件付き確率を利用して，本問を考察せよ。

問題２　学生数 1 万人の某大学には魔法使いが 1 人いた。魔法使い探知機があるが，誤判定率は 10%である。つまり，人間であっても魔法使いと判定する確率が 10% であり，その逆の判定も 10 % である。（魔法使い探知機問題）

(1)　1 人を調べたとき，探知機が「魔法使い」と判定する確率を求めよ。

(2)　探知機が「魔法使い」と判定を下したとき，実際にその人が魔法使いである確率を求めよ。

$\boxed{\text{問題3}}$　A，B，Cの3人の囚人のうち，2人が処刑され1人は釈放されることになっているが，Aにはそれが誰か知らされていない。Aは看守に
「BかCのどちらかは確実に処刑されるのだから，あなたがBかCのどちらが処刑されるかを私に教えてくれても，私自身のことについては何も教えないことになる」
と言った。その看守は，この論法を正しいと認めて「Bが処刑される」と答えた。
その看守が答える前は【Aが処刑される確率は$\dfrac{2}{3}$】であったが，答えを聞いた後では，処刑される可能性がある者は彼自身とCの2人しかいないことになるので【Aが処刑される確率は$\dfrac{1}{2}$】となるから，Aは以前より幸福であると感じた。Aが幸福と感じるのは正しいといえるか。（サーベロニの問題）

問題１　A，B，Cの３つの扉があり，そのうちの１つのドアの後ろにある豪華賞品を当てるテレビ番組のコーナーがある。司会者のモンティホールだけが正解の扉を知っている。
挑戦者がAの扉を選んだ。すると，司会者は残された扉のうちからBを開け，それが外れであることを挑戦者に見せ，次のように言った。
「はじめに選んだAの扉のままでもよいが，ここでCの扉に変更してもよいですよ」
挑戦者は扉をAとする【そのまま】のがよいか，Cとする【変更する】のがよいかについて，次のように考えよ。

(1)　直感として【そのまま】，【変更する】のどちらがよいか。（モンティホール問題）
　※それとも，【何をしても運命は変わらない】なのか。

①司会が3つの紙コップのいずれかの中にアメを1つセットする。
②回答者は紙コップを1つえらぶ。
③司会は②の紙コップとは別の「はずれ」紙コップを開ける。
④回答者は下の戦法に従い，紙コップを開け，結果を記録する。

(2)　これから指示に従って，実験せよ。

	当たった数	外れた数
【そのまま】戦法		
【変更する】戦法		

(3)　条件付き確率を利用して，本問を考察せよ。

当たりの扉は［表1］のように①～③のパターンがある。
これらに対し，「Bは外れ」と司会者が教えるのは［表2］のようになる。

［表1］

	A	B	C	
①	○	×	×	$\frac{1}{3}$
②	×	○	×	$\frac{1}{3}$
③	×	×	○	$\frac{1}{3}$

［表2］

	「Bは外れ」
①	50%
②	—
③	100%

「Bは外れ」と言われるのは，
$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times0+\frac{1}{3}\times1=\frac{3}{6}$.
「Bが外れ」かつAが○は $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$ より
「Bが外れ」のときAが○の条件付き確率は $\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}}=\frac{1}{3}$.
「Bが外れ」かつCが○は $\frac{1}{3}\times1=\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$ より，
「Bが外れ」のときCが○の条件付き確率は $\dfrac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}}=\frac{2}{3}$.
よって，Cに変更した方がよい。

問題２　学生数１万人の某大学には魔法使いが１人いた。魔法使い探知機があるが，誤判定率は10%である。つまり，人間であっても魔法使いと判定する確率が10% であり，その逆の判定も 10 % である。（魔法使い探知機問題）

(1)　１人を調べたとき，探知機が「魔法使い」と判定する確率を求めよ。

$\frac{1}{10000}\times\frac{9}{10}+\frac{9999}{10000}\times\frac{1}{10}$

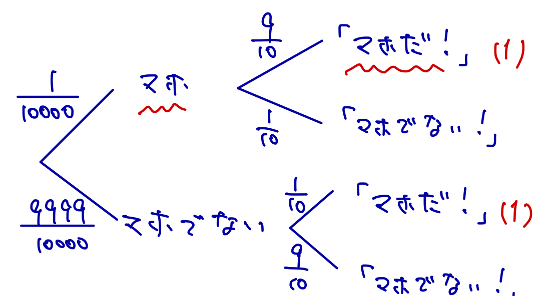
$=\frac{9+9999}{100000}=\frac{10008}{100000}=0.10008$.　約 10.008%

(2)　探知機が「魔法使い」と判定を下したとき，実際にその人が魔法使いである確率を求めよ。

右図から，［マホ かつ「マホだ！」］は $\frac{1}{10000}\times\frac{9}{10}=\frac{9}{100000}$.

よって，$\dfrac{\frac{9}{100000}}{\frac{10008}{100000}}=\frac{9}{10008}$

$=\frac{1}{1112}=0.000899\cdots$　よって，約 0.9%



$\boxed{\text{問題3}}$ A，B，Cの3人の囚人のうち，2人が処刑され1人は釈放されることになっているが，Aにはそれが誰か知らされていない。Aは看守に

「BかCのどちらかは確実に処刑されるのだから，あなたがBかCのどちらが処刑されるかを私に教えてくれても，私自身のことについては何も教えないことになる」

と言った。その看守は，この論法を正しいと認めて「Bが処刑される」と答えた。

その看守が答える前は【Aが処刑される確率は $\frac{2}{3}$】であったが，答えを聞いた後では，処刑される可能性がある者は彼自身とCの2人しかいないことになるので【Aが処刑される確率は $\frac{1}{2}$】となるから，Aは以前より幸福であると感じた。Aが幸福と感じるのは正しいといえるか。（サーベロニの問題）

処刑されるのは［表1］のように①〜③のパターンがある。これらに対し，看守の回答が［表2］のようになるとする。

看守が「Bだ」と回答する確率は

$$\frac{1}{3}\times 1+\frac{1}{3}\times 0+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$$

看守が「Bだ」かつAが処刑は $\frac{1}{3}\times 1=\frac{1}{3}$.

よって，条件付き確率は，$\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$，正しくない。

［表1］

	A	B	C	
①	×	×	○	$\frac{1}{3}$
②	×	○	×	$\frac{1}{3}$
③	○	×	×	$\frac{1}{3}$

［表2］

	「Bだ」	「Cだ」
①	100%	–
②	–	100%
③	50%	50%

1 **問題**

１５段の階段があります。階段を上るのに，1段ずつ上るのと，2段上るのと二通りの上り方があります。この上り方を組み合わせて，ちょうど１５段上るには何通りの上り方があるでしょうか？

2 **フィボナッチ数列とは**

のことである。

具体的に書きだすと、

これを漸化式で表すと

となります。

□　私たちの身の回りにもあるフィボナッチ数

- **花弁の枚数**
- **ひまわりの螺旋の数**
- **松ぼっくりの螺旋**
- **台風**

3 **どの図形を美しいと感じる？**

①

②

③

4 **フィボナッチ数列と黄金比**

黄金比（Golden ratio)**とは**

最も美しい値である。

これを　$\phi=$ ＿＿＿＿

辺の比が黄金比になるような長方形を ＿＿＿＿ **という。**

□身の回りの黄金比

- **私たちの体**
- **モナリザ**
- **ミロのビーナス**
- **葛飾北斎の浮世絵**
- **ピラミッドの高さと底辺の比**
- **凱旋門**
- iPhone
- **パルテノン神殿**

5 **フィボナッチ数列の一般項を求めよう！**

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$$

この式を ＿＿＿＿ **という。**

証明

6 **フィボナッチ数列の性質**

① $F_1+F_2+F_3+\cdots\cdots+F_n=F_{n+2}-1$

② $F_1{}^2+F_2{}^2+F_3{}^2+\cdots\cdots+F_n{}^2=F_n\times F_{n+1}$

1 次の無限級数は収束するか発散するでしょうか？また，その結果について証明できますか？

① $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

② $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

2 **バーゼル問題**

平方数の逆数を無限に加え続けるとその和はどうなるかという問題です。1644年にピエトロによって提起されたバーゼル問題は多くの数学者を悩ませましたが，およそ100年後の1735年にオイラーによって解かれ，$\boxed{}$ に収束することが分かりました。

つなみに，

$\zeta(p)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ を $\boxed{}$ という。

現代日本の入試問題では次のようなタイプが頻繁に出題されている。

問題　無限級数 $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^2-4}$ の和を求めよ。

部分分数分解で解ける基本レベルである。挑戦してみよう！

そんな難問のバーゼル問題ですが、実は2003年の日本女子大学理学部の自己推薦入試や、1990年の東工大後期第2問に出題歴があります

3 バーゼル問題について，Eulerの解法を味わってみよう！

証明